中央研究院
三民主義研究所

專題選刊

(十七)

吉尼係數之公設式研究

周建富

中華民國
臺灣　臺北　南港
中華民國六十八年一月
(七十五年重新排印出版)

吉尼係數之公設式研究*

周　建　富

第一節　前　言

當前家庭所得分配之研究仍然處於理論前期，研究重點著重在衡量家庭所得分配之不平均度，以及從實證資料判斷決定所得分配之重要因素。一方面從"公設"(Axiom)出發來建立某些不平均指標〔註一〕；另一方面則設計某些公式，以便從有系統的資料中找出影響不平均度的因素。

假定實際觀察得到的總所得為二種或多種成分相加之和（例如總所得為工資所得與財產所得之和）。如同計算總所得分配之不平均度 I(Y)，我們亦可算出工資所得分配之不平均度 I(W)，以及財產所得分配不平均度 I(π)。因此，可以設計一個分解的公式，把總所得分配之不平均度 I(Y) 歸咎於 I(W) 及 I(π)〔註二〕。此種分析的方法稱為「加成性成分研究法」(Additive components approach)。只要所得來源能明顯的劃分，則加成性成分研究法是很有用的。例如將所得分成工資所得和財產所得，正好可以和傳統的功能性所得分配連結起來〔註三〕。

*本文為中央研究院三民主義研究所籌備處「台灣經濟發展與所得分配」研究計劃之一部份。作者感謝計劃主持人費景漢及陳昭南兩位先生的指導。

就一般常用的不平均度指標——吉尼係數（ Gini Coefficients）——來說，加成性分解法把總所得不平均度 G（Y）分解成爲 q 種所得成分 W^i（ $i=1,2,\cdots\cdots q$）之不平均度 $G(W^i)$ 的線型組合：$G(Y)=\sum_{i=1}^{q}\phi_i R_i G(W^i)$。其中 ϕ_i 代表第 i 種成分之所得佔總所得比率，R_i 爲第 i 種成分所得與總所得順位的相關係數。如果 W^i 的分配非常不平均，且集中於窮人，則 W^i 的不平均顯然會對所得分配的平均（而非不平均）有所貢獻，亦即使 G（Y）下降。在這種情形下，R_i 成爲負項。

從吉尼係數推導出上述的分解公式，已經有許多文獻述及〔註四〕。本文的方向則與此相反。本文將證明，如果 I(Y) 爲任何可以分解成爲 $\phi_i R_i G_i$ 之和的合理指標，則 I(Y) 必然是吉尼係數。從公設式研究法的觀點來看，本文以指標之分解能力爲公設之一，再加上無記名公設（ Axiom of Anonymity ），從而推論出吉尼係數。在最後一節，我們放棄無記名公設，而推導出一個比吉尼係數更一般化的不平均指標。

第二節　符號與公設的假定

令 n 維度實數空間的正象限表示如下：

$$\Omega=\{\ Y\mid Y=(\ Y_1,\ Y_2,\ \cdots\cdots,\ Y_n\ )\geqq 0\ \}\tag{2-1}$$

Ω集合的任意點 Y 代表一種家庭所得分配樣式。任意不平均度之基數指標（ ordinal index ）I(Y) 係指定義於Ω之實數值函數。設 k 爲任意正實數，則 kI(Y)使Ω空間之點的序數排列（ ordinal ranking ）與 I(Y) 相同。因此，我們可以假設

$$I(\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0,\ 1\ )=\frac{n-1}{n}\tag{2-2}$$

亦即是，最極端不平均的分配樣式（最有錢的家庭得到所有的所得）的不平均指標是 $\frac{n-1}{n}$。

在不平均度衡量的公設式探討，某些合理的（亦即直覺上令人同意的）特性被

建立爲公設〔註五〕。一般常設定的公設有：(1)無具名公設；$I(Y_1, Y_2, \cdots\cdots Y_n) = I(Y_{i1}, Y_{i2}, \cdots\cdots Y_{in})$ 其中 $(i_1, i_2, \cdots\cdots i_n)$ 爲 $(1, 2, \cdots\cdots n)$ 之任意排列。(2)尺度無關公設（Scale irrelevant axiom）；$I(kY) = I(Y)$，$k>0$。(3)移轉公設；在不改變貧富關係的原則下，由富者移轉所得給窮者會使不平均度下降。設定這些公設以後，我們可以進而證明大多數的常用指標都滿足這些公設〔註六〕。

一種對所得分配不平均度衡量的理想探討是更進一步嘗試利用公設來決定指標型態，亦即嘗試設定更多的或更强的公設，從而找出滿足公設之唯一不平均度指標 $I(Y)$。有不少指標正是用這種方式找出的〔註七〕。本文的目的即利用公設去決定最常用的不平均度指標——吉尼係數。

很顯然的，要利用公設來決定吉尼係數，我們必須找出一些不但直覺上令人同意，同時又足夠强有力的公設。在第一節的前言，我們曾經提到，加成性成分研究法有重要的經濟涵義。從這個意義來說，我們可以根據一個指標是否能夠用爲分解公式做判定標準。因此，對於一個連續的指標（Continuous index）$I(Y)$，本文設定如下的兩個公設：

公設一　無具名（對稱性）：$I(Y_1, Y_2, \cdots\cdots Y_n) = I(Y_{i1}, Y_{i2}, \cdots\cdots Y_{in})$

公設二　可分解性：$I(Y) = \phi_1 R_1 I(W_1) + \phi_2 R_2 I(W_2)$

式中

$$W_1 = (W_{11}, W_{12}, \cdots\cdots, W_{1n})$$

$$W_2 = (W_{21}, W_{22}, \cdots\cdots, W_{2n})$$

$$Y = W_1 + W_2$$

$$\phi_1 = \frac{\Sigma W_{1i}}{\Sigma Y_i}, \quad \phi_2 = \frac{\Sigma W_{2i}}{\Sigma Y_i}$$

$$R_1 = \frac{\mathrm{cov}(W_1, \lambda_Y)}{\mathrm{cov}(W_1, \lambda_{W1})}, \quad R_2 = \frac{\mathrm{cov}(W_2, \lambda_Y)}{\mathrm{cov}(W_2, \lambda_{W2})}$$

λ_Y 爲 Y 之由小而大排列順位，亦即

$\lambda_Y = (r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n)$，$r_i$ 爲第 i 個家庭之所得 Y_i 之順位。

λ_{W_1}, λ_{W_2} 的定義類同 λ_Y 。 (2-3)

ϕ_1，ϕ_2 爲兩種因素所得佔總所得比例，R_i 爲第 i 種所得順位與總所得順位的相對性相關係數。

就公設式探討的精神而言，本文一方面必須證明吉尼係數滿足這兩個公設，另一方面要證明此二公設決定唯一的指標 I(Y)，而此指標正是吉尼係數。關於吉尼係數滿足此二公設的證明，已有不少文章提出〔註八〕，因此在此略而不談。下一節本文將提出二個公設共同決定吉尼係數的數學證明。

第三節　主要定理的證明

引理　滿足無具名公設及可分解性公設之連續的所得分配不平均度指標具備尺度無關的特性：

$$I(kY)=I(Y)\ ,\ k>0$$

證：先證明 k 爲任意大於等於二之整數時命題成立。令 Y 爲家庭所得分配樣式。定義 $W_1=Y$，$W_2=(k-1)Y$。則 $kY=W_1+W_2$，$\phi_1=1/k$，$\phi_2=(k-1)/k$。同時 W_1，W_2 與 kY 都有相同的所得順位。因此，$R_1=R_2=1$。（$R_i=\mathrm{cov}(W_i,\lambda_{W_i})/\mathrm{cov}(W_i,\lambda_Y)$，$\lambda_{W_i}=\lambda_Y$）。應用分解性公設，得到

$$I(kY)=\frac{1}{k}I(Y)+\frac{k-1}{k}\ I[(k-1)Y]$$

當 n＝2 時

$$I(2Y)=\frac{1}{2}\ I(Y)+\frac{1}{2}\ I(Y)\ ,$$

命題成立。

設 k＝n－1 時命題成立，則

$$I(nY)=\frac{1}{n}\ I(Y)+\frac{n-1}{n}\ I[(n-1)Y]$$

$$= \frac{1}{n} I(Y) + \frac{n-1}{n} I(Y)$$

$$= I(Y)$$

因此，$k = n$時命題亦成立。根據數學歸納法，k爲任意正整數時尺度無關的命題都成立。

其次證明k爲任意有理數$\frac{n}{m}$時命題亦成立。從上述正整數時命題成立可知

$$I(\frac{n}{m} Y) = I(\frac{1}{m} Y)$$

令$\frac{1}{m} Y = X$，亦即$mX = Y$。則

$$I(Y) = I(mX) = I(X)$$

代入上式，

$$I(\frac{n}{m} Y) = I(\frac{1}{m} Y) = I(X) = I(Y)$$

因此得證k爲正有理數時命題成立。

但有理數具有稠密性（ density ），由 I(Y) 之連續性得證k爲任意正實數時，尺度無關的命題成立。

Q.E.D.

定理一　唯有吉尼係數爲滿足 (2-2)，(2-3) 之連續的所得分配不平均指標。

證：設向量 $y = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 爲任意所得分配樣式，$y_1 \leq y_2 \leq \cdots\cdots \leq y_n$，且 $\Sigma y_i = 1$。玆定義兩組所得分配向量如下：

$$b_1 = (y_1, 0, \cdots\cdots, 0)$$

$$b_2 = (0, y_2, \cdots\cdots, 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n = (0, 0, \cdots\cdots, y_n)$$

$$c_1 = (0,\ y_2,\ y_3,\ \cdots\cdots,\ y_n)$$

$$c_2 = (0,\ 0,\ y_3,\ \cdots\cdots,\ y_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{n-1} = (0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ y_n)$$

根據 b 與 c 的定義可知

$$y = b_1 + c_1 = b_1 + b_2 + c_2 = \cdots\cdots = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n$$

從無具名公設以及上面之引理可得

$$I(b_1) = I(b_2) = \cdots\cdots = I(b_n)$$

再設 λ_y 代表 y 的所得順位向量，b_{bi}，λ_{ci} 各自代表 b_i 及 c_i 的順位向量。根據 y，c_i，以及 b_i 的定義得到

$$\lambda_y = \lambda_{c1} = \lambda_{c2} = \cdots\cdots = \lambda_{cn-1} = (1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$\lambda_{bi} = (1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ i-1,\ n,\ i,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

因此

$$\mathrm{cov}\ (b_i,\ \lambda_y) = b_i\lambda_y' - n\left(\frac{y_i}{n}\right)\frac{n+1}{2}$$

$$= iy_i - \frac{(n+1)\,y_i}{2}$$

$$\mathrm{cov}\ (b_i,\ \lambda_{bi}) = ny_i - n\left(\frac{y_i}{n}\right)\frac{(n+1)}{2}$$

$$= ny_i - \frac{n\,(n+1)\,y_i}{2n}$$

$$= \frac{(n-1)\,y_i}{2}$$

$$z_i = \frac{\mathrm{cov}\ (b_i,\ \lambda_y)}{\mathrm{cov}\ (b_i,\ \lambda_{bi})} = \frac{2i-(n+1)}{n-1} = \frac{\mathrm{cov}\,(b_i,\ \lambda_{ci-1})}{\mathrm{cov}\,(b_i,\ \lambda_{bi})}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

逐項代進分解公設如下：

$$I(y)=I(b_1+c_1)$$

$$=y_1\frac{\operatorname{cov}(b_1,\lambda_y)}{\operatorname{cov}(b_1,\lambda_{b1})}I(b_1)+(1-y_1)\frac{\operatorname{cov}(c_1,\lambda_y)}{\operatorname{cov}(c_1,\lambda_{c1})}I(c_1)$$

$$=y_1z_1I(b_1)+(1-y_1)I(c_1)$$

$$=y_1z_1I(b_1)+(1-y_1)I(b_2+c_2)$$

$$=y_1z_1I(b_1)+(1-y_1)\Big[\frac{y_2}{(1-y_1)}\frac{\operatorname{cov}(b_2,\lambda_{c1})}{\operatorname{cov}(b_2,\lambda_{b2})}I(b_2)$$

$$+\frac{(1-y_1-y_2)}{(1-y_1)}\frac{\operatorname{cov}(c_2,\lambda_{c1})}{\operatorname{cov}(c_2,\lambda_{c1})}I(c_2)\Big]$$

$$=y_1z_1I(b_1)+y_2z_2I(b_2)+(1-y_1-y_2)I(c_2)$$

如此分解 n－1 次以後，得到

$$I(y)=y_1z_1I(b_1)+y_2z_2I(b_2)+\cdots\cdots+y_nz_nI(b_n)$$

$$=(y_1z_1+y_2z_2+\cdots\cdots+y_nz_n)I(b_n)$$

$$=\left(\frac{n}{n-1}\right)\left[\frac{2}{n}(y_1+2y_2+\cdots\cdots+ny_n)-\frac{n+1}{n}\right]I(b_n)$$

$$=\frac{n}{n-1}G(y)I(b_n)$$

$$=\frac{n}{n-1}G(y)I(0,0,\cdots\cdots,1)$$

$$=\frac{n}{n-1}G(y)\frac{n-1}{n}=G(y)$$

G(y)即吉尼係數，因而定理得證。

系一　滿足(2-2),(2-3)之連續的所得分配不平均指標具有下二特性：

(一)　$I(W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n)=\phi_1R_1I(W_1)+\phi_2R_2I(W_2)+\cdots\cdots\cdots+\phi_nR_nI(W_n)$

(二)　I(Y)滿足移轉公設。

證：以上二個特性都是吉尼係數所具備的。

第四節　一般化吉尼係數

在二、三兩節，我們由無具名公設及分解性公設出發而導出傳統的吉尼係數。證明過程中，主要的推理都來自分解性公設。事實上，無具名公設只在最後的一段證明才出現，用以證明

$$I(b_1)=I(b_2)=\cdots\cdots=I(b_n)=\frac{n-1}{n},$$

亦即社會總所得都集中在一個人手中時，不論此人爲誰，所得分配不平均指標都是 $\frac{n-1}{n}$。由此看來，要導出一個不平均指標，只要有分解性公設就夠了，無具名公設似乎是多餘的。

另一方面，就某些方面來看，無具名公設並非絕對合理。例如所得分配一向以家庭爲單位，但是並不考慮家庭成員的多寡，一個人口數十的大家庭與一個三口之家一視同仁。直覺上看來，社會總所得集中在一個大家庭的所得分配不平均度應該小於集中於一個人手中的不平均度。

從這兩方面的考慮，我們似乎可以放棄無具名公設，而假定

$$I(b_i)=w_i\,\frac{n-1}{n} \tag{4-1}$$

亦即當總所得集中於一個家庭時，所得分配不平均度隨該家庭的特徵而不同，w_i 是決定於第 i 個家庭特徵的一個係數。

放棄無具名公設，我們可以得到一個較吉尼係數更一般化的不平均度指標如下:

$$I(y)=y_1z_1I(b_1)+y_2z_2I(b_2)+\cdots\cdots+y_nz_nI(b_n)$$

$$=(y_1z_1w_1+y_2z_2w_2+\cdots\cdots+y_nz_nw_n)\,\frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \Sigma \frac{y_i w_i [2i - (n+1)]}{(n-1)}$$

$$= \frac{2}{n} \Sigma i y_i w_i - \frac{n+1}{n} \Sigma y_i w_i$$

當$w_i = 1$時此式又回到傳統的吉尼係數。將以上的推理列爲定理二如下：

定理二　滿足（2-2）之分解性公設及（4-1）的連續的所得分配不平均度指標爲

$$I(y) = \frac{2}{n} \Sigma i y_i w_i - \frac{n+1}{n} \Sigma y_i w_i$$

附　　註

〔註　一〕許多學者已經對既存指標的特性做過深入的研究。例如 Champernowne Kondor, Sen, Szal and Robinson, Field and Fei.

〔註　二〕關於吉尼係數的此種分解公式，見 Rao。

〔註　三〕在 Fei, Ranis, Kuo 的實證分解分析，把所得分成工資、財產和農業所得，正好跟經濟發展過程的「功能性所得分配效果」及「資源重分配效果」連結起來。

〔註　四〕例如 Fei, Ranis, Kuo, Pyatt, Rao　。

〔註　五〕見 Sen。

〔註　六〕Field and Fei 證明變異係數、吉尼係數，Atkinson 指標，以及 Theil 指標都滿足上述三個公設。

〔註　七〕Sen 以公設方式得到其「貧窮指標」。Atkinson 由尺度無關公設加上其對社會福利函數所作假設而導出 Atkinson 指標。

〔註　八〕見註四。

參考文獻

1. A. B. Atkinson, "On the Measurement of Inequality," *Journal of Economic Theory*, September, 1970.

2. D. G. Champernowne, "A Comparison of Measures of Inequality of Distribution," *The Economic Journal*, December, 1974.

3. J. C. H. Fei, G. Ranis and S. W. Kuo, "Growth and the Family Distribution of Income," *Quarterly Journal of Economics*, February 1978.

4. G. S. Fields and J. C. H. Fei. "On Inequality Comparisons," *Econometrica,* Forthcoming.

5. Y. Kondor, "Value Judgements Implied by the Use of Various Measures of Income Inequality," *Review of Income and Wealth,* October, 1975.

6. G. Pyatt, "On the Interpretation and Disaggregation of Gini Coefficients," *Economic Journal,* 86 (June, 1976).

7. V. M. Rao, "Two Decompositions of Concentration Ratio," *Journal of the Royal Statistical Society,* series A, 132 Part 3, 1969.

8. A. K. Sen, *On Economic Inequality,* New York, Norton, 1973.

9. A. K. Sen, "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement," *Econometrica,* March, 1976.

10. R. Szal and S. Robinson, "Measuring Income Inequality," Princeton University and Brookings Institution, mimeo, 1975.