社會科學整合論文集，陳昭南、江玉龍、陳寬政主編。
中央研究院三民主義研究所叢刊(9)，頁87-106.
中華民國七十一年（1982），八月十五日。台北，南港。

心理學數理模型之檢討*

黃　榮　村**

心理學從哲學中獨立出來至今不過百餘年，早期心理學受物理學及生理學的影響，相當著重心理現象的基本分析單位與數量化的可能性。James（1890）即曾提出一條有名的公式，

$$\text{自尊} = \text{成功} / \text{自負} \quad (1)$$

(1)式從現在的觀點看來，當然是問題重重，但在當時至少代表著一種對心理現象數量化的興趣。在心理學史早期，眞正對心理現象作數量化努力的，是有關感覺歷程的系統性研究，Weber－Fechner 律即在說明人對外界物理刺激強度（S）的主觀感覺（W），W與S之間存在一種對數關係，

$$W = (1/k)\ln S \quad (2)$$

(2)式成立的基本要件是

$$\triangle S / S = k \quad (3)$$

$\triangle S$ 表示相對於標準刺激所增加的刺激量（Increment），而使得受試者在主觀感

*本文初稿曾蒙劉英茂、鄭昭明、與陳寬政惠予閱讀及指正，特此致謝。
**台灣大學心理學系副教授，中央研究院三民主義研究所副研究員。

覺上剛好能覺察出 S＋$\triangle$S 與 S 是不同的。但(3)式往往只適用在當 S 不太大也不太小時，故 Guilford（ 1932 ）提出

$$\triangle S = kS^{g} \tag{4}$$

(4)式中的 g 值依據實驗資料，大約是 $1 \geq g \geq .5$，少數情形有 $g > 1$ 者。當 $g = 1$ 時，便是(3)式。S. S. Stevens 於 1953 年左右提出乘冪律（ Power Law ），

$$R = CS^{a}$$

或　　（ C 爲常數 ）　　(5)

$$\log R = a \log S + \log C$$

(5)式將 W 這種內在的心理歷程，改爲在實驗室操作中可觀測到的反應（ Observable Response, R ），但基本想法仍是一致的。(2)式與(5)式中的 $1/k$ 與 a（是一種敏感度的指標，對不同的刺激向度有不同的敏感度），都是需要從實驗資料中估計的參數，它們被外界物理刺激向度所決定。於 1950 年代左右發展的訊號察覺理論（ Theory of Signal Detection, TSD ），則同時考慮了兩個獨立的變項，一爲感覺上的變項（ d′ ），另一爲認知上的變項（ β ），爲心理物理學（ Psychophysics ）上首度聯合考慮該二因素。TSD利用統計決策理論，發展出複雜的數理模型，並應用到人類知覺、判斷、記憶的研究上。

在心理學的傳統研究主題中，有一項是有機體的行爲組型如何建立與如何變化，Hull（ 1943 ）首先提出一套擬數量化的形式系統（ Formal System ），用以說明動物在實驗室中，如何在刺激與反應之間（ S－R ）建立起習慣強度(Habit Strength, $_{S}H_{R}$ ），

$$_{S}H_{R} = M(1 - e^{-kw})e^{-jt}e^{-ut'}(1 - e^{-iN}) \tag{6}$$

(6)式中包括四個實驗變項：w（酬賞量），t（反應與強化之間的時距），t′（條件刺激與無條件刺激之間，CS－US，的時間），N（強化的次數）；與五個需從實驗資料中作事後估計的常數：M，k，j，u，i。由於該系統包含太多需要估計的自由參數（ Free Parameter ），因此 Skinner（ 1950）認爲在基本資料尙未

收集足夠之前，這種形式化理論是相當不切時機的。但由於 Hull 對強化（ Reinforcement）作用提出了相當具體的心理學理論，且其利用數理模型（如(6)式）改寫基本的心理學概念，並設法導出較精確而可從實驗資料驗證的數學函數的努力，開啓了以後數理學習理論（ Mathematical Learning Theory ）的發展[註一]。Estes（ 1950 ）進一步將學習與表現（ Performance ）視爲一種隨機過程（亦即將刺激 S，視爲一個由很多元素組成的群體，受試者可隨機在群體中抽取一個樣本出來，其抽樣方式爲取出後放回（With Replacement），且在學習過程中有各種聯結的可能性：S－R，R－O，S－O，在這種S－R－O序列中，S 代表刺激，R 爲反應，O表作了某種反應後所得到的增強後果。由 Estes（ 1950 ）的「刺激抽樣理論」（ Stimulus Sampling Theory, SST ）所建立的數理模型中，最重要的一條學習公式是

$$p_{n+1} = p_n + \theta (1 - p_n) = (1 - \theta) p_n + \theta \qquad (7)$$

(7)式適用於兩種選擇（Binary Choice, 亦即當刺激出現時有兩種反應形式A_1 與A_2）的實驗情境，θ 表示在任一嘗試次（Trial）中某一刺激元素被抽選到的或然率（ $0 \leq \theta \leq 1$ ），θ 在不同嘗試次中保持固定值，p_{n+1} 表示一刺激元素在第 n＋1 個嘗試次剛開始時被條件化（Conditioned）的或然率。利用倒推公式（ Recursive Formula ），可將(7)改寫成

$$p_n = 1 - (1 - p_1) (1 - \theta)^{n-1} \qquad (8)$$

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 1$$

由(8)式可知 p_n 爲 n 的負加速函數（ Negatively Accelerated Function of n ）。(7)式、(8)式與(6)式相比較，可知自由參數數目大幅降低，且以實際觀察到的正確反應（在此處爲A_1 ）數來計算 p_n（在第 n 次嘗試次作對反應的或然率），不必像(6)式中的 $_SH_R$，帶有濃厚的內在心理色彩。(7)式與(6)式的差別，就像(5)式與(2)式的差別，且(7)式與(5)式都有較完備的心理學理論與實驗資料支持。

數理模型在心理學上的使用範圍，越來越擴大，並不侷限於上面所述。

Lefebvre & Batchelder（1981）曾引述一份統計資料，說明在 1964～1973 年間，Journal of Mathematical Psychology（JMP）上發表的論文中，在心理學各項研究題材上使用數理模型的百分比，如表一。由表一中可見在1964～1970

表一　JMP 1964-1973 發表論文的百分比分解

研究題材	1964～1967	1968～1970	1971～1973
1. 學習與記憶	50.3	49.0	33.6
2. 信號察覺	15.4	13.3	21.0
3. 決策過程	15.4	14.7	15.4
4. 測量與量度	5.6	11.9	10.4
5. 數理方法	2.8	3.5	4.2
6. 反應時間	4.9	1.4	4.9
7. 社會與團體行爲	1.4	5.6	9.1
8. 其他	4.2	0.6	1.4

年間，「學習與記憶」所佔比重幾達一半，可能係受 1950 年代以後數理學習理論潮流的影響，但在 1970 年代以後部份心理學家改採電腦模型（Computer Model），可能因此導致 JMP 上該類研究百分比的減低。數理模型應用的現況並不是全然樂觀的，Estes（1975）認爲數理方法與理論在心理學上的大幅應用，始自 1950 年左右，「數理心理學」一詞之正式出現，則在 Luce, Bush, & Galanter（1963）一書，及 JMP 於 1963 年的創刊。據 Estes 的估計，JMP 創刊以來所發表的論文中，測量理論方面的約佔 10～20％，方法與比較一般性心理歷程的比率小於 10％，其他 70～75％左右都是特殊實驗領域中所建立的數理模型；所提供的影響力與應用性頗堪懷疑。Krantz, Atkinson, Luce, & Suppes（1974）認爲目前心理學數理模型中有較重要發展且已累積相當成果（Cumulative Progress）者，仍以感覺歷程（Sensory Processes）方面的研究爲主。感覺歷程的心理學研究易有重要的累積性成果，可能是因爲它有一較易作數理分析的物理向度（Physical Dimension），因此較易做量度（Scaling），也較易推導與建立出類似物理學與生理學

的定律出來。

站在社會科學整合的立場，本文暫不討論感覺歷程，因爲它的分析單位是物理的與生理的，而非一般社會科學家感興趣的行爲單位，且難免帶有較濃厚的「生理化約論」（Physiological or Physical Reductionism）色彩。數理心理學界目前對測量理論的基礎研究相當有貢獻，但太涉專門知識，所牽涉到存在性、唯一性、及意義性等的嚴格證明（Krantz, Luce, Suppes, & Tversky, 1971），與社會科學整合中所需的權宜措施（Conventional Approach）的考慮略有距離，故本文也不擬在此提及。社會行爲（Social Behavior）是一較大的行爲單位，且在社會科學整合中佔最重要地位，但傳統上認爲要成功地建立社會行爲數理模型的可能性較小，故將另文探討。

本文選擇若干以傳統數學方法及考慮個人的心理歷程，所建立的數理模型爲主，並進行討論其假設系統與導出的數理模型間的關係，以提供在作社會科學整合時，如何考慮要不要做數理模型與如何做出數理模型。

(一)假設系統與數學形式

1.數理模型與統計模型

社會及行爲科學對現象界或人本身存在的某些特性，嘗試以一套合理的理論加以解釋，之後有些研究者爲求更精確化，嘗試找出該理論的簡化假設（Simplifying Assumptions），以數理模型去處理由該理論所作的數量上的引申，數理模型往往出諸以數學方程式，利用收集到的資料作參數估計（Parameter Estimation），並檢討該數理模型是否能妥善處理所收集到的資料，稱之爲適合度檢驗（Goodness of Fit），再進一步考慮是否有必要修改該模型的假設系統，進而對其背後的理論系統提出修正，以符合現象界中存有的特性。若該數理模型是以機率分配爲基礎，遵循統計學的假設系統及技術作參數估計，則該模型稱之爲統計模型（Statistical Model）。在社會及行爲科學中的數理模型，往往也就是統計模型，因此

本文在此不作嚴格區分。爲使該數理模型能具有較廣泛的應用性，而不侷限在所處理的特殊研究題材，建構模型的研究者往往會放鬆其假設條件（ Less Restrictive Assumptions ），並儘量使用傳統的數學方法。

由於目前心理學界流行消息處理研究法（ Information – processing Approach ），因此電腦模擬模型（ Computer – Simulation Model ）的使用相當普遍，這類模型不以人爲實驗對象，而將電腦當作實驗對象，來跑一跑由研究者依據合理的考慮（包括如何善用電腦本身具有的特殊能力）所設計出來的程式，以驗證他所提出的模型與理論是否可行。這類模型目前重點在探討人類認知系統中，有關問題解決、理解過程、語文知識與程序性知識的結構以何種方式表現出來，已獲重要結果，並已在實驗室中收集人類的資料以互相驗證。這種以人造智慧（Artificial Intelligence ）爲基礎的研究方式，在認知科學（ Cognitive Science ）中相當蓬勃，Newell & Simon （ 1963，1972）爲其中的領導性人物，但這兩種模型並不是互相衝突的， Estes （ 1975 ）卽認爲電腦模擬模型可提供研究某類問題的架構，但該模型的部分或其副系統則可以數學分析形式表現，以對所研究對象的動態特性做更進一步的掌握，如 Anderson & Bower （ 1973，Ch. 10)所曾做過的嘗試。電腦模擬模型非本文探討重點，底下將以列擧方式探討若干心理學上的數理模型及其假設系統。

2.心物之間的關係

在古典心理物理學（ Classical Psychophysics ）中，設外界物理刺激量爲S，內在的主觀感覺爲w，則在探討S要變化到何種程度（ $S+\Delta S$ ）時，W才會跟著引起有意義的變化（$W+\Delta W$）時，對ΔS與ΔW的設定，有底下四種不同的可能假設：

（Ⅰ）$\Delta W=c$，$\Delta S=b$　　（b，c爲常數）

（Ⅱ）$\Delta W=c$，$\Delta S=kS$　　（ΔS爲S的線性函數，k爲常數）

(Ⅲ) $\triangle W = hW$, $\triangle S = b$ （$\triangle W$爲W的線性函數，h爲常數）

(Ⅳ) $\triangle W = hW$, $\triangle S = kS$

對（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）（Ⅳ）分別取$\triangle W / \triangle S$，並改寫成微分形式$dW / dS$，則依次可得四個解，

$$W = (c/b)S - c_1 \quad \text{（線性方程式，} c_1 \text{爲常數）} \tag{9}$$

$$W = (c/k)\ln S - c_2 \quad \text{（對數方程式，} c_2 \text{爲常數）} \tag{10}$$

$$W = c_3 e^{(h/b)S} \quad \text{（指數方程式，} c_3 \text{爲常數）} \tag{11}$$

$$W = c_4 S^{h/k} \quad \text{（乘冪方程式，} c_4 \text{爲常數）} \tag{12}$$

或

$$\ln W = (h/k)\ln S + \ln c_4 \text{（對數線性方程式）}$$

在(10)式中令 $c = 1$，$c_2 = 0$，則得(2)式；在(12)式中令 $c_4 = c$，$h/k = a$，則得(5)式。1950年代 S. S. Stevens 將W改爲以實際觀測到的反應（R）爲分析單位，並利用要受試者對物理刺激作直接數字分派（Direct Number Assignment）的方法，發展出等距與等比（Interval vs. Ratio Estimation）的直接測量方法，巧妙地避免了早期心理物理學以恰辨差（Just Noticeable Difference, JND）的閾限(Threshold）概念，但是，兩者的基本想法仍是一致的。在模型檢驗的實驗室工作方面，則發現(9)(10)(12)式在不同的實驗程序及不同的物理刺激向度上，各有其成立的條件，但(11)式至今仍欠缺足夠的實驗數據以資支持（Baird & Noma, 1978）。

3.問題解決的嘗試次與解決時間

由統計分析可知，一事件要在一固定的時間區內連續失敗k次後成功一次的機率分配爲

$$p_1(k) = pq^k \; ; \; k = 0, 1, 2 \cdots\cdots \tag{13}$$

這是一種幾何分配（Geometric Distribution），$\mu = q/p$，$\sigma^2 = q/p^2$。若擴展到r個時間區，每個時間區內都是幾何分配，且互相獨立，則在 $k + r + 1$ 次中剛好成

功 r － 1 次的機率分配爲二項分配（ $\binom{k+r-1}{k}$ ）$p^{r-1}q^k$，今假設在第 k ＋ r 次成功之機率爲 p，故在 k ＋ r － 1 次中剛好成功 r － 1 次，且在第 k ＋ r 次成功的機率分配爲負二項分配（ Negative Binomial Distribution ）

$$p_r(k)=\binom{k+r-1}{k}p^rq^k\ ;\ k=0,1,2\cdots\cdots \tag{14}$$

(14)式之 $\mu=r(q/p)$，$\sigma^2=r(q/p^2)$。當 r＝1 時，$p_1(k)=\binom{k+1-1}{k}p^1q^k=pq^k$。

幾何分配與負二項分配祗涉及成功與失敗的嘗試次（ No. of Trials ）， 若進一步想知道完成某一幾何分配所需的時間的機率分配，則將其所需的總時間分割成相等的△t 區間，令 p(△t)表示在△t 時間內成功的機率，且令 $\lim\limits_{\triangle t\to 0}\dfrac{p(\triangle t)}{\triangle t}=\lambda$，則 $p(\triangle t)=\lambda\triangle t$；設機率密度函數（ Probability Density Function ）f（t)表示在 t 時間內連續失敗 k 次，而在第 t ＋△t 區間內成功第一次的機率密度函數，則

$$\Sigma p(k)=\Sigma f(t)\triangle t\ ,\ p(k)=f(t)\triangle t$$

$$f(t)=(pq^k/\triangle t)\cdot(\lambda\triangle t/\triangle t)(1-\lambda\triangle t)^{t/\triangle t}$$

$$\lim_{\triangle t\to o} f(t)=\lambda\cdot(\lim_{\triangle t\to o}(1-\lambda\triangle t)^{\frac{1}{\triangle t}})^t=\lambda e^{-\lambda t} \tag{15}$$

(15)式是一負指數分配（ Negative Exponential Distribution ），$\mu=1/\lambda$，$\sigma^2=1/\lambda^2$。同理，擴展到 r 個變項時，令 $S_r=\sum\limits_{i=1}^{r}x_i$；$x_1$，$x_2$，……$x_r$ 互相獨立， 且機率分配爲 $\lambda e^{-\lambda t_i}$（ $i=1,2,\cdots\cdots r$ ）之恒等分配（ Identically Distributed ），則利用變數變換及 Jacobian 技術（ Apostol, 1957 ），可得 $p_{s_2}(s)=\lambda^2s_2e^{-\lambda s_2}$ ， $p_{s_3}(s)=\dfrac{\lambda^3}{2}s_3^2e^{-\lambda s_3}$ ， $p_{s_4}(s)=\dfrac{\lambda^4}{3!}s_4^3e^{-\lambda s_4}$ ，……

由上可得一通式

$$g(t;\lambda,r)=\frac{\lambda}{(r-1)!}e^{-\lambda t}(\lambda t)^{r-1}=\frac{\lambda^rt^{r-1}e^{-\lambda t}}{\Gamma(r)} \tag{16}$$

(16)式中 $\Gamma(r)=\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$，爲一Gamma函數，因 r 爲正整數，故 $\Gamma(r)=(r-1)!$。$g(t;\lambda,r)$ 爲Gamma分配，$\mu=\frac{k}{\lambda}$，$\sigma^2=\frac{k}{\lambda^2}$。當 $r=1$ 時，$g(t,\lambda,1)=\lambda e^{-\lambda t}$。上述證法是一較直覺式的證明，另外可用動差衍生函數 (Moment Generating Function, MGF) 的事後證明法，可參見 McGill (1963)。

Restle & Davis (1962) 即利用Gamma分配，處理問題解決的解決時間 (Solution Time)，並作參數估計，以印證每一問題之解決需要經過幾個階段，且各階段互相獨立，當全部階段都作對後，才算解決了問題。因此他們認爲這是一個 $S_r=\sum_{i=1}^{r}x_i$ 的統計學問題，其機率分配應爲Gamma分配，利用參數估計法求出之階段數 ($\hat{r}$)，應相等於解決某一問題的理論階段數 (r)。他們設計了三個問題：(1)繩子問題。一個犯人要從一塔上越獄，發現有一條繩子，但祇夠安全抵達地面的一半長，他如何作得到？(正確答案應是「將繩子剝開兩半接起來」，祇需用到一個簡單的概念，故 $r=1$)。(2)文字陷阱。試判斷下列文句是否正確： If the puzzle you solved before you solved this one was harder than the puzzle you solved after you solved the puzzle you solved before you solved this one, was the puzzle you solved before you solved this one harder than this one?

(正確答案「是」，$r=3$)。(3)水桶問題。現在你眼前有四個可以盛 163，14，25，11 盎司水的水桶，請你想辦法倒出一桶剛好是 77 盎司的水 (正確答案 $163-[2(25)+14+2(11)]$ 或 $163-[25+2(14)+3(11)]$，$r=5$ 或 6)。他們記錄下每個受試者解決這三個問題所需的總時間，並去除失敗受試者的時間資料，對該三個問題的資料進行Gamma分配的參數估計，算出 $r=1.3$，3.0，5.0，相當接近於理論上的 r 值。Restle & Davis (1962)所用的參數估計法是動差法 (Method of Moments)，Bree (1975) 使用最大概似法 (Maximum Liklihood Estimate)，發現更能配合 Restle & Davis (1962) 的時間資料。依筆

者看法，在 Restle & Davis（1962）的分析中，有兩點理論上的問題值得注意：(1)由於能觀測到的祇是受試者最後解決了問題的總時間，故受試者是否按照研究者的推論，眞的經過了 r 個解決階段，尙值商榷，進一步的作法應是在受試者解決問題時，同時要求受試者邊想邊講出他心中的想法（Thinking Aloud），如此可能有助於確定受試者是否眞的有經過 r 個解決階段，且可評估不同階段是否有不同難度。但口頭資料的收集有其限制，參看 Ericsson & Simon（1980）。(2)該研究假設每個解決階段互相獨立，事實並不然，當受試者無法解決前一階段時，下一階段便無法解決，因此一個階段的解決必決定於前一階段之是否解決，但 Restle & Davis（1962）因去除了失敗者的資料（無法確定最後是失敗在那一階段），故在其研究中尙可自圓其說。這種資料的篩選方式是否在其他社會科學中亦常應用，值得進一步討論。

4.學習的邏輯函數

邏輯函數（Logistic Function）與常態分配的累積曲線（Normal Ogive）非常相似，Birnbaum（1968）曾比較兩個經修正過的常態分配累積曲線及邏輯函數:

$$p_{\beta}(\theta)=r+(1-r)\int_{-\alpha}^{\alpha(\theta-\beta)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}t^{2}\right)dt \qquad (17)$$

$$p_{\beta}(\theta)=r+\frac{1-r}{1+\exp[-1.7\alpha(\theta-\beta)]} \qquad (18)$$

(17)與(18)式中的 α，β，γ 爲被估計之參數，計算結果發現(17)與(18)之相差 ≤ 0.01，可見兩者在數值上的接近。因此求出一邏輯函數的結果後，尙可合理的探討其可能具有的常態特性。

上文之(7)與(8)式是探討學習的嘗試次分配，今倣效上節求其時間分配，可得一邏輯函數。由(7)式得 $p_{n+1}=p_n+\theta(1-p_n)$，$\frac{\triangle p}{\triangle n}=\frac{p_{n+1}-p_n}{n+1-n}=\theta(1-p)$，$\triangle t_n=1/p_n$（此處爲一簡化之假設，當已被條件化的元素增多時，則每次抽樣出來

的元素所需之處理時間，$\triangle t$，便隨之減少），$\therefore \frac{\triangle p}{\triangle t}=\frac{\triangle p}{\triangle n}\cdot\frac{\triangle n}{\triangle t}=\theta(1-p)p$，

$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle p}{\triangle t}=\theta p-\theta p^2$，$\frac{dp}{dt}=p(\theta-\theta p)$，

$$\int_{p_{t_0}}^{p}\frac{dr}{r(\theta-\theta r)}=\int_{t_0}^{t}ds=t-t_0$$

$$\int_{p_{t_0}}^{p}\left(\frac{\frac{1}{\theta}}{r}+\frac{1}{\theta(1-r)}\right)dr=\frac{1}{\theta}\left(\ln\frac{p}{p_{t_0}}+\ell n\left|\frac{1-p_{t_0}}{1-p}\right|\right)$$

$$\because \frac{1-p_0}{1-p}>0$$

$$\therefore \theta(t-t_0)=\ln\frac{p}{p_{t_0}}\cdot\frac{1-p_{t_0}}{1-p}$$

$$e^{\theta(t-t_0)}=\frac{p}{p_{t_0}}\cdot\frac{1-p_{t_0}}{1-p}$$

$$p(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{p_{t_0}}-1\right)\exp\left[-\theta(t-t_0)\right]} \tag{19}$$

（θ 爲參數，p_{t_0} 在某些實驗條件下可先行設定）

進一步檢討其邏輯函數的特性，

$$\frac{d^2p}{dt^2}=\theta\frac{dp}{dt}-2\theta p\frac{dp}{dt}=(\theta-2\theta p)p(\theta-\theta p)\begin{cases}>0\text{，若 }p<\frac{1}{2}\\=0\text{，若 }p=\frac{1}{2}\\<0\text{，若 }p>\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以$p=1/2$爲該邏輯曲線之轉折點（ Inflection Point ）。其他的證法可參考Estes（ 1950 ）及 Restle & Greeno（ 1970 ）。

邏輯函數是人口成長率、技術創新的傳播（如Mansfield, 1961 ）等類問題上的典型函數，但不一定是心理學上處理時間過程的最常見方法，主要原因在於設定

微分方程式中的競爭因素（ Competition Factor ，如 $dp/dt=\theta p-\theta p^2$ 中 $-\theta p^2$ 的設定）時，有其難以自圓其說的理論上的困擾。另一常見的函數形式是負加速（ Negatively Accelerated ）的指數函數。 Peterson & Peterson （ 1959 ）在控制嚴謹不受外界干擾的實驗室中，要求受試者記住一些很簡單而不需作語意處理的語文材料，要不然短期記憶的記憶痕跡會隨著時間而消失。其他不同的觀點可參閱 Baddeley（ 1976 ）。今設 x_0 爲剛開始時（ $t=0$ ）所記得的語文材料數目，今要預測到 t 時間時，該受試者還記得多少（ x_t ），又由經驗資料中得知縱使過了一段長時間，受試者總還能記得原來語文材料的 1/10 ，這是一種長期記憶。因此

$$\frac{dx_t}{dt}=-k\left(x_t-\frac{1}{10}x_0\right),\ k>0$$

$$x_t=\frac{1}{10}x_0+\frac{9}{10}x_0e^{-kt} \tag{20}$$

(二)策略行爲的數理化

上述對嘗試次與時間歷程的探討，基本上都是靜態的，且研究者（ 如 Restle & Davis 1962 ）在以數理模型處理較複雜的心理歷程（如問題解決）時，主要是以實驗者而非受試者爲本位，依其理性的考慮，推導出適當的模型加以檢定。電腦模擬模型也大半是利用這種方法。另一作法則較具動態性，在探討問題解決的策略行爲並建立數理模型時，參考受試者有效的語言報告，以提供了解認知過程的可靠而有用的消息來源。因內省與語言報告有其不穩性與不確性，故如何儘量使受試者更爲明確而迅速的講出他正察覺到的內心活動，並去除受試者應用推論過程以補足不完全記憶的語言報告，這些都是在收集有效的語言報告時所需注意的(Dominowski 1974，Ericsson & Simon 1980 ）。黃榮村（ 1976 ）即以該方法收集適用的語言報告，建立策略行爲的數理模型，探討受試者在辨認條件式概念（ $X\rightarrow Y$, $\sim X\rightarrow Y$, $X\rightarrow\sim Y$, $\sim X\rightarrow\sim Y$ ， 時所需的嘗試次。建立該模型的三個假設是：(1)在辨

認邏輯概念時，受試者先收集足夠的資料，再進行該概念中所具有屬性的檢定。(2)受試者有完全記憶，亦即受試者能記住實驗進行中的所有細節。(3)受試者會使用最適策略，亦即使用保守的專注（ Conservative Focusing ）策略， 每次祇改變檢驗樣本中的一個屬性，依次檢驗下去，而且不會再重覆檢驗。能滿足這三種條件的受試者稱之爲理想受試者（ Ideal Subject ）。當受試者在有充分時間下作這種條件式概念的辨認時，實驗結果與理論上的數理模型相當配合；但當受試者被限定在很短的時間內（ 1 秒的呈現時間，與 2 秒的嘗試間距（ ITI ）），一定要做反應時，則所得實驗資料較難用以理想受試者爲基礎導出的理論模型，來說明資料特性。進一步觀察受試者的反應，則發現當消息處理時間相當有限時，容易造成認知上的緊張（ Cognitive Strain ），有相當比例的受試者無法有效的解決問題，且有下述與在正常情況下建立模型的假設系統相矛盾的情形：(1)形成固定行爲，一直在收集資料，但無法進行下一步的檢驗階段。(2)無完全記憶；作過的事常常會再不由自主的重覆做。

數理模型無疑的可以改寫基本的心理學概念，並可得到較精確、可供驗證實驗資料的數學函數，但它也有其極限性。在人類高等心理歷程（ Higher Mental Processes ）的研究上，這種極限性更爲明顯 ，上述所提卽是一例。 Falmagne（ 1974 ）則認爲時至今日， 數理模型的使用仍無法處理人類創造歷程的特色；不過，創造力的基本歷程相當難以了解，心理學的其他領域到目前爲止，也仍無突破性的進展。

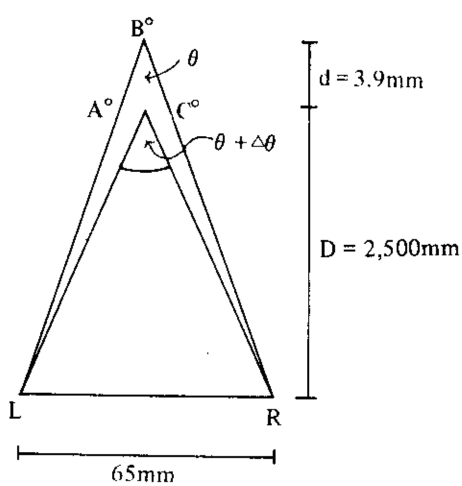
(三)知覺世界的數理模型

一般在測量深度知覺的敏銳度時，常用「三桿實驗」，三根桿子皆爲直立，其中兩根固定在左右兩邊，中間一根可自由前後移動。兩根固定桿與受試者等距，中間一根桿子可以循固定軌道自由移動，受試者需判斷三根桿子是否在同一直線上，之後求出固定桿與非固定桿之間距離的差異閾，計算視差角(Angle of Disparity)，

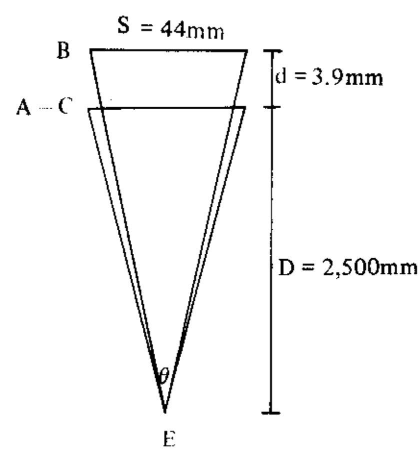
以評估深度知覺的敏銳度。今設受試者距離目標箱2,500mm，先固定受試者頭部，以避免產生運動視差，並設三桿實驗的結果，爲當非固定桿距離固定桿3.9mm時，受試者即已無法分辨三根桿子是否不在同一條直線上，則3.9mm 便爲該受試者的差異閾。若將該差異閾換算爲秒弧度，則有兩種作法：

(1)點弧度法（圖一(A)，Woodworth & Schlosberg 1954）。將非固定桿B視爲一點，並將A與C兩固定桿以介於A與C之間的中點代表，該點並不客觀存在，就如同眼睛在看A與C時，會輻輳到它們的中間點一樣。計算B點與$\overline{AC}$中點對雙眼（以L與R表示）所形成之θ與$\theta+\triangle\theta$，$\triangle\theta$便是視差角。令$\overline{LR}=65$mm，則$\theta+\triangle\theta=65/D$（弧度）$=65/2,500\times 206,265=5,362.89$（秒弧度）；$\theta=65/2,503.9\times 206,265=5,354.54$（秒弧度）；$\triangle\theta=8.35$秒弧度，$\triangle\theta$即爲可表示深度知覺敏銳度的視差角。

(2)線弧度法（圖一(B)，黃榮村 1981），若干實驗數據顯示受視測物體的長短與周圍脈絡的變化，可能會影響人類的深度知覺能力，但在點弧度法中並無考慮



點弧度法（A）



線弧度法（B）

圖一　點弧度法與線弧度法

桿子的長度，今以線弧度法重行計算。設三根桿子A，B，C的長度皆相同，各爲44mm，B以線段S = 44mm表示，A桿與B桿則以在兩者中間不存在的線段（$\overline{AC}$）表示。此時$\theta+\triangle\theta=2(\frac{1}{2}(\theta+\triangle\theta))$，因$\theta$小（若S<<D，則$\theta$值一般在$1^\circ\sim2^\circ$之間），故$\theta\doteq\tan\theta$，$\tan\theta=\tan2(\frac{1}{2}\theta)=2\tan\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{\frac{1}{2}s}{D+d}=$ S/D+d；$\tan(\theta+\triangle\theta)=\frac{S}{D}$。$\triangle\theta=\theta+\triangle\theta-\theta=\tan^{-1}\frac{S}{D}-\tan^{-1}\frac{S}{D+d}$ =5.65秒弧度。當S = 65mm時，點弧度法與線弧度法可得相同結果。另外還可利用雙眼視差（Binocular Disparity）的觀念，做更符人類視覺習慣的計算，此法尙在發展中，不擬在此列出。點弧度法與線弧度法都能滿足次序保存（Order Preserving）與線性（Linearity）的特性，亦即當d增大時，秒弧度亦呈線性的增大。當S值很大時，線弧度法由於是由反正切函數求算，故可能發生負加速曲線的情形，但在$0\leq x\leq 1$時，$\tan^{-1}x$則仍保存線性的特性。在實際的深度知覺能力檢驗中，不可能發生$x\geq 1$的情形，因若$x\geq 1$則表示$S\geq D$，這在實驗室的實際操作中根本不可能發生。線弧度法在使用「假設的數目」上，比點弧度法少一項——雙眼瞳孔間的距離（$\overline{LR}$），因此線弧度法能以較少之假設而獲得與點弧度法相同之結果。

上述計算方法假定人類有所謂的深度知覺，亦即能夠按照歐幾里得幾何系統的三度空間原理，去辨認外在世界的事物，且網膜可以處理由視差角所提供的空間消息，並認爲這種在實驗室中固定頭部與眼睛所量出來的深度知覺敏銳度，可以應用到外界環境中。但Gibson（1979）從根本上就批判這種理論，他認爲在人類每天充滿高效率的直接知覺（Direct Perception，指直接知覺到的外在事物，而非像讀書、看電視、看圖片這類需要推論的間接知覺）中，人不是注視（Looking At）而是四處看（Looking Around），人是會動的而且也確實在動，所以眼睛在頭裡面

頭在身體上面身體站在地面上（ eyes – in – the – head – on – the – body – resting – on – the – ground），因此傳統上「網膜影像」（ Retinal Image ）的假設根本上就是錯的，因此他認爲實驗室中的深度知覺研究結果，可能不具備生態效度（ Ecological Validity ）。他認爲人的知覺並不依靠空間觀念，除非人能看到脚下的大地及周圍的環境，否則根本無法知覺到虛幻的空間（正如當我們看一片很均匀的石灰牆，根本就看不到任何東西，因爲他無法提供一個不均勻的光學結構）。他認爲人知覺到的是表面的配置（ Surface Layout ），而非空間，靠這種表面配置所提供的光學結構，人才能知覺到外界事物，而且外界環境所提供的光學結構及梯度（ Gradient ）是因人而異因看的角度而異。假如 Gibson（ 1979 ）這整套想法是正確的，則在實驗室中對深度知覺敏銳度的測量，所探討的外界物理刺激的數理結構及視差角，就變得很沒有意義了。當然，對他這種激烈的革命性想法，在心理學界也不是有一定見解的，見 Fodor & Pylyshyn（ 1981 ）, Turvey, Shaw, Reed, & Mace（ 1981 ）。

(四)結　　論

在某些研究題材上，數理方法的運用，最主要是在發現資料的規律性。但數理模型在心理學上的使用，不應只是用來發現資料的規律性，它應該是伴隨心理學理論產生出來的，當心理學理論需要修改時，數理模型必也隨之修改，它並不是一成不變的。有時不同的數理模型所得出的參數估計值，都相當能描述資料中所具有的特色〔註二〕。所以能配合資料的模型不一定就是最正確的模型，還需要針對所得的參數值，作「分理性」的判斷，以決定何者較宜採信，如Restle & Greeno(1970)。

註　　釋

〔註一〕Rashevsky (1951)也在學習歷程上提出很多數學化的處理，但對心理學研究之影響甚少。Bush (1960) 認為是因為當為一個數理生物學家的 Rashevsky 並不特別關切心理學家所提出來的理論問題與實證資料，而且主要在從生理模型上導出學習函數，而非關心行為變項

之間的關係。

〔註二〕一個一般性理論(Global Theory)的提出，往往含有一些不明顯 (Implicit) 的假設，而且其假設數目也不多。因此當兩個或兩個以上競爭性理論 (Competing Theories) 出現，並建構數理模型以驗證資料時，可能因明顯形式化 (Explicit Formulation) 的關係，使得兩個數理模型的假設系統有重疊的現象產生（這祇是其中一個可能原因），以致兩個模型都能適當的描寫 (Equally Fit) 被驗證的資料。在該一情況下要選擇一個最適的模型，一個方法是按參數估計值的「合理性」作判斷，例如該二模型的其中一個參數中，一個估計出每分打 150 個英文字，另一個估計出每分打 80 個字，則按照對人類英文打字速度的合理判斷，應以採行後者為佳。另一方法則是重新設計另一實驗或觀測的對象，可以儘量使兩個模型導出不同的且精確的預測，再做參數估計與適合度檢驗，重新加以選擇。選擇最適模型的方法有很多種標準，上述二者祇是其中較易進行的方法。

參考書目

黃榮村

1976 條件式概念辨認中序列性與同時性辨認法的比較研究，台灣大學心理學系博士論文。

黃榮村

1981 「強度計算法與深度知覺能力的計算」，中華民國航空醫學會70年年會宣讀論文。

Anderson, J. R., & Bower G. H.

1973 *Human Associative Memory.* Washington D. C.: Winston.

Apostol, R. M.

1957 *Mathematical Analysis.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Baddeley, A.

1976 *The Psychology of Memory.* New York: Basic Books.

Baird, J. C., & Noma, E.

1978 *Fundamentals of Scaling and Psychophysics.* New York: Wiley.

Birnbaum, A.

1968 "Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability," in F. M. Lord & M. R. Novick (eds.), *Statistical Theories of Mental Test Scores.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Bree, D. S.

1975 "The distribution of problem-solving times: an examination of the stage model." *British Journal of Mathematical & Statistical Psychology* 28: 177-200.

Bush, R. R.

1960 "A survey of mathematical learing theory," In R. D. Luce (ed.), *Developments in Mathematical Psychology.* Glencoe, Ill.: The Free Press.

Dominowski, R. L.

1974 "How do people discover concepts?" in R. L. Solso (ed.), *Theories in Cognitive Psychology: The Loyola Symposium*, pp. 257-288. New York: LEA.

Ericsson K. A., & Simon, H. A.

1980 "Verbal reports as data." *Psychological Review* 87: 215-251.

Estes, W. K.

1950 "Toward a statistical theory of learning." *Psychological Review* 57: 94-107.

1975 "Some targets for mathematical psychology." *Journal of Mathematical Psychology* 12: 263-282.

Falmagne, R. J.

1974 "Mathematical psychology and cognitive phenomena: comments on preceding chapters," in D. H. Krantz, R. C. Atkinson, R. D. Luce, & P. Suppes (ed.), *Contemporary Developments in Mathematical Psychology*, Vol. 1, pp. 145-161. San Francisco: Freeman.

Fodor, J. A., & Pylyshyn, Z. W.

1981 "How direct is visual perception?: some reflections on Gibson's 'Ecological Approach'." *Cognition* 9: 139-196.

Gibson, J. J.

1979 *The Ecological Approach to Visual Perception*. Boston, MA: Houghton-Mifflin.

Guilford, J. P.

1932 "A generalized psychophysical law." *Psychological Review* 39: 73-85.

Hull, C. L.

1943 *Principles of Behavior*. New York: Appleton-Century-Crofts.

James, W.

1890 *The Principles of Psychology*, Vol. 1, Ch. 10. New York: Dover, 1950.

Krantz, D. H., Atkinson, R. C., Luce, R. D., & Suppes, P. (eds.)

1974 *Contemporary Developments in Mathematical Psychology*, Vol. 1. San Francisco: Freeman.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P., & Tversky, A.

1971 *Foundations of Measurement*, Vol. 1. New York: Academic Press.

Luce, R. D., Bush, R. R., & Galanter, E. (eds.)

1963 *Handbook of Mathematical Psychology*, Vol. 1. New York: Wiley.

Mansfield, E.

1961 "Technical change and the rate of imitation." *Econometrica* 29: 741-756.

Newell, A., & Simon, H. A.

1963 "Computers in psychology," in R. D. Luce, R. R. Bush, & E. Galanter (eds.), *Handbook of Mathematical Psychology*, Vol. 1, pp. 361-428. New York: Wiley.

1972 *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Peterson, L. R., & Peterson, M. J.

1959 "Short-term retention of individual items." *Journal of Experimental Psychology* 58: 193-198.

Rashevsky, N.

1951 *The Mathematical Biology of Social Behavior.* Chicago: University of Chicago Press.

Restle, F., & Davis, J. H.

1962 "Success and speed of problem solving by individuals and groups." *Psychological Review* 69: 520-536.

Restle, F., & Greeno, J. G.

1970 *Introduction to Mathematical Psychology.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Skinner, B. F.

1950 "Are theories of learning necessary?" *Psychological Review* 57: 213-216.

Sternberg, S.

1963 "Stochastic latency mechanism," in R. D. Luce, R. R. Bush, & E. Galanter (eds.), *Handbook of Mathematical Psychology*, Vol. 1, pp. 309-360. New York: Wiley.

Turvey, M. T., Shaw, R. E., Reed, E. S., & Mace, W. M.

1981 "Ecological laws of perceiving and acting: in reply to Fodor and Pylyshyn (1981)." *Cognition* 9: 237-304.

Woodworth, R. S. & Schlosberg, H.

1954 *Experimental Psychology.* New York: Holt, Rinehart, & Winston.