《社會科學計量方法發展與應用》　楊文山主編
中央研究院中山人文社會科學研究所專書 (41)，頁263-287
民國86年9月，臺灣，臺北

社會共識程度之衡量

施俊吉*

壹、前　言

這是紛亂不安的年代，這是依賴社會調查作預言的年代。

在社會調查中，使用 Likert 量表的情形十分普遍。例如，當我們想瞭解，台灣社會對於「以公民投票決定台灣前途」的看法時，調查者可以提出下述之問題：

「請問您同不同意『以公民投票的方式決定台灣的前途』？」

然後讓受訪者在「非常同意」、「同意」、「沒意見」、「不同意」、以及「非常不同意」之間，選取一個最能代表其意見強度的選項作答。這種模式的社會調查，即是一種典型的民意測度法。

以 Likert 量表所獲得的問卷資料，經過分析以後，可以獲得諸多攸關社會意向的預言。而在所有的民意當中，有一種經常被人們掛在嘴邊，但是在衡量上，卻始終找不到明確定義的特質：社會的共識程度 (degree of consensus)。而本研究的重心，就是在探討「如何利用 Likert 量表所獲得的資料，衡量社會對於特定問題之共識程度。」

* 中央研究院中山人文社會科學研究所研究員，中央大學產經所教授。本文為國科會專題研究計畫之成果 (編號：NSC 85-2415-H-001-016)。

何謂 'consensus'？牛津字典對其所下的定義是："Agreement in opinion; the collective unanimous opinion of a number of persons." 所以 'consensus' 的本意，應當是「完全之共識」，但是本研究的客體，則是「不完全之共識」。

本研究的起點是，不完全之共識能否分出等級與程度？本研究的終點則是，建立一項測量共識程度的指標。這項指標本文將之命名爲「s^* 指標」，它具備下述之特點：

i) 當全體之意見一致時，不論一致同意什麼或反對什麼，皆爲完全之共識，此時指標攀升到上限，上限等於 1。

ii) 當群體均分爲二，半數非常贊成，半數非常反對，意見呈兩極對峙時，指標等於 0。

iii) 如果共識程度介於前兩者之間，例如，三分之一的人非常贊成，三分之二的人非常反對時，指標就會落在 0 與 1 之間。

iv) 當意見呈兩極對峙時，對立程度固然激烈，但是共識程度不必然最低。例如，當一個群體的每個成員都各自堅持一種相異的意見時，這種「一盤散沙」的意見分佈型態，可能就比兩極對峙時的意見型態更缺乏共識。所以共識度指標會小於0，以反應前述事實。

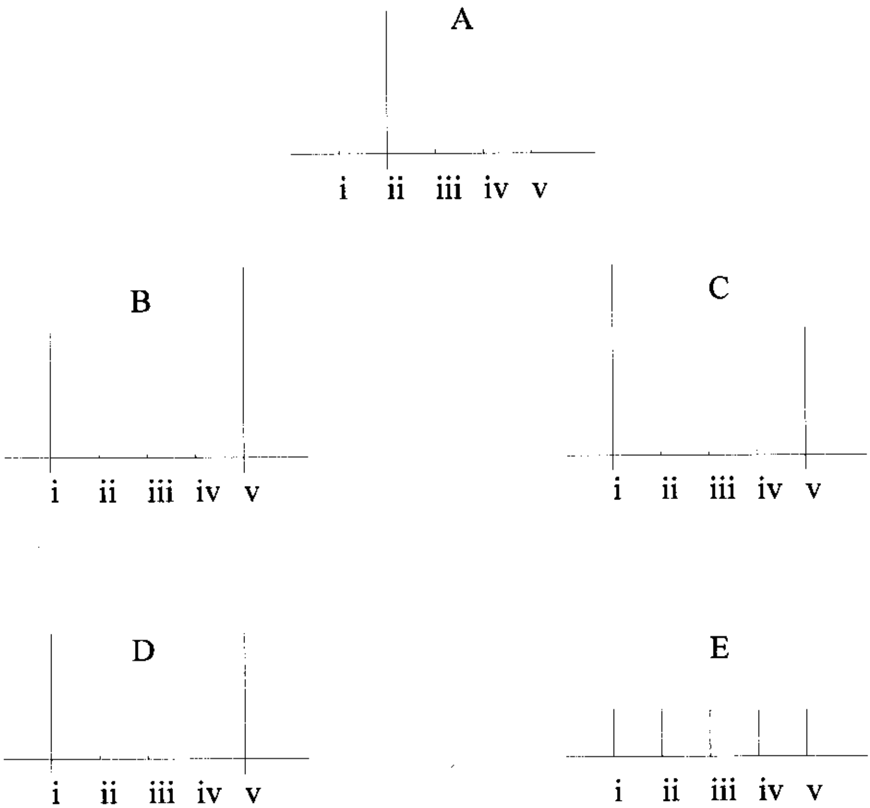
本研究爲了方便社會學者利用 s^* 指標進行共識程度之分析，特地研發了一個公用軟體，專司 s^*，以及其他相關指標的運算。這項軟體函索即贈。[1]

本文之架構如下。第二節敘述共識程度的本質，並且說明其與離散度及不均度之關係。第三節以公設式分析法 (axiomatic approach) 推演共識度指標。[2] 第四節闡釋指標的基本性質。第五節是結論。

貳、共識程度的本質

引介一項新觀念，絕非易事。而共識程度的衡量就是一種新的觀念，所以我們必須根據直觀和概念，展開這項研究。

圖 (1)



在針對一項問題進行社會調查之後，回收的資料包括受訪者的意見，以及各種意見強度之下的統計人數。這樣的一組資料，稱爲一個

「分配」(distribution)。而所謂的共識程度，必然與這個分配的型態有關。現在就讓我們以直覺來判斷圖 1中各種分配的共識程度。

A 分配是一個完全退化的分配，因為全部的受訪者都支持同一種意見。此時應該沒有人會反對這叫「完全共識」，也不會有人反對：「完全共識是最高程度的共識，而且不論意見集中在那一點都是『完全共識』」。

準此，所謂的共識程度應該與意見的名號和稱呼無關，例如，B 分配的共識程度應該等於 C 分配的共識程度，因為這兩種分配的差別，僅止於將支持意見 i 與支持意見 v 的人數互相調換而已。

根據上述之推論，可以立即引申：共識程度在一般狀況下不等同於不平均度 (inequality)。[3]

此乃因為如果將原先用於代表意見強度的i, ii, ···, v，重新命名為所得級距，例如：以 i 代表所得最低的一級 (少於一萬元)，以 v 代表所得最高的一級 (高於一億元)，則 B 分配的所得不平均度如果以吉尼係數衡量，絕對遠超過 C 分配的不均度，雖然這兩個分配的共識程度是相同的。

如此便可獲得另外一項結論：共識度與不均度的概念不同，所以絕對不能以草船借箭的方式，從不均度指標中借用任何指標，拿來衡量共識程度。

話雖如此，但這並不表示沒有其他既存的指標足資代用。事實上，各種衡量離散程度的指標，例如變異數或均互差 (mean difference)[4] 均有可能屏雀中選。以分配 B 和分配 C 而言，這兩項分配的共識程度相同，變異數相同，均互差也相同。因此以變異數權充共識度指標，或者是以均互差瓜代的可能性確實存在。所以我們必須藉助分配 D 與分配 E，作為進一步討論的工具。

分配 D 叫做「兩極分配」(polarization distribution)，在此狀況下，意見最弱與意見最強的受訪者，各佔半數。而分配 E 則叫做「齊一分配」(uniform distribution)，在此狀況下，支持各種意見強度的人數相等。此時可以試問：D 分配與 E 分配的共識程度，孰與強弱？

事實上，就離散程度而言，兩極分配一定比齊一分配離散，所以如果以任何一種離散度指標權充共識程度的衡量工具，則兩極分配的共識程度比較弱。

但是相信不會有太多人滿意這項答案。因爲兩極分配所代表的是極端對立的社會，而齊一分配所代表的則是一盤散沙的社會。極端對立的社會比起一盤散沙的社會，我們實在很難遽下定論說，那一種社會的共識程度比較弱。所以在共識程度的衡量上，我們不能以一般的離散度指標作爲代用品，武斷地認定「極端對立」較「一盤散沙」缺乏共識。

準此，Esteban 與 Ray (1994) 於晚近所發展的「兩極化指標」，顯然也不適合作爲共識程度的衡量指標。因爲該項指標的特色之一，即是以兩極分配作爲兩極化程度最強的分配。現若採用該項指標衡量共識，無可避免地會陷入相同的武斷之中。

既然如此，我們就必須放棄舊瓶新酒的念頭，共識程度之衡量必須有其專屬之指標。

參、共識度指標的建立

3.1 受訪者之意見強度

透過前一節的分析，我們知道所謂的共識程度，乃是一個含意深邃且複雜的概念。既有的不均度指數，以及其他用於衡量離散程度的指標，都無法精確反映共識這項概念。因此，在本節當中，我們將發展出一個新的指標，作爲衡量共識程度之用。

本文利用公設法建立指標。所謂的公設法，就是依據一組先驗之公設，經過逐步之演繹，推導出所需命題的數學方法。但是在提出這組公設之前，我們必須對所謂的「受訪者之意見強度」，做以下幾點說明：

A1. 本文假定受訪者的意見強度可以用一個介於 0 與 1 之間的實數來代表。亦即，如果以 z_i 代表第 i 種意見強度，則 $z_i \in [0,1]$。

A2. 如果問卷所設計的選項，依據意見之強度分成 K 級。這 K 級之意見，假定從 $L_1, L_2, \cdots,$ 依序排列到 L_k。例如，選項中的 L_1 代表「非常贊成」，L_2 代表「贊成」，⋯，L_k 代表「非常反對」。則本文假定每一對相鄰之選項，其所間隔的意見距離相等，皆爲 $1/(K\text{-}1)$。此外，任何兩個不相鄰的選項 L_m 與 L_n 之間的意見距離則爲 $|m-n|/(K-1)$。因此，L_1 與 L_K 的意見距離就等於1，此乃最大的意見距離。

A3. 本文令選項 L_1 的意見強度爲0, L_2 的意見強度爲 $1/(K-1), \cdots, L_m$ 的意見強度爲 $(m-1)/(K-1)$，餘者依此類推。同時並假定受訪者會選擇一個最接近其意見強度的選項作答。例如當 $K=5$，而受訪者的意見強度爲0.6時，此一受訪者會選擇 L_3 作答。因爲此時 L_3 所代表的意見強度等於0.5，而 L_4 所代表的意見強度則爲0.75，顯然 L_3 比較靠近0.6。所以受訪者所選擇的答案是 L_3。

A4. 共識程度的高低受到意見距離的影響，但是與意見的種類沒有關係。例如，當全部的受訪者都表示「非常反對」時，其所表現的共識程度，不應該與全體皆表示「非常贊成」時有所不同。所以當問卷設計者將選項分成 K 級時，意見強度可以是依序遞減，也可以是依序遞增，我們將不容許這兩種排列方式上的差異，對結論產生實質的影響。換言之，我們可以令 L_1 代表「非常贊成」，令 L_K 代表「非常反對」;也可以顛倒過來，以 L_1 代表「非常反對」，以 L_K 代表「非常贊成」，而結論必須不變。[5]

以上四點說明乃是我們在發展共識度指標以前，必須建立的「共識」。本文將它們當作基本假設看待。

3.2 分配與共識度之衡量

現在讓我們引介一些基礎的定義與數學符號。

在針對一項問題展開社會調查之後，回收的資料包括受訪者的意見，以及各種不同意見強度之下的統計人數。這樣的一組資料，稱爲一個分配，以 $(\pi,z)\equiv(\pi_1,\cdots,\pi_K;z_1,\cdots,z_K)$ 代表之。其中 π_i 是意見強度等於 z_i 的人數，所以受訪者的總人數即爲 $\sum_{i=1}^{K}\pi_i$。此外，$z_i\in[0,1]$，如前所述。而對所有的i,j 而言，$z_i\neq z_j$，且 $\pi>0$。

準此，所謂的共識度之衡量 (consensus measure)，就是一個從分配之空間 D 反映到實數集 R 的映射 S，若以數學表示，即爲 $S:D\rightarrow R$。上述之定義，也可以用白話加以表達：「所謂的共識度之衡量，就是如何以一個實數，具體反映一個分配所代表的共識程度」。

此一衡量的重要性在於：如果我們能夠畢竟其功，則一個分配的共識程度，就可以用一個實數來代表,而此一實數的大小，即代表共識程度之強弱。

3.3 共識度模型

一個分配的共識程度究竟有多強，並不是一個容易回答的問題。但是我們可以先驗地假定，共識程度的強弱，受到兩種因素的影響。第一種因素是認同感 (identification)；第二種因素是疏離感 (alienation)。[6]

所謂的認同感，就是在一組意見強度相同的人群之中，個體與個體之間，相互所激發出來的凝聚力。認同感愈強，共識程度也就愈高。至於認同感的強弱，則受到人數的影響。因爲在同一群人之中，

每個成員的認同感必然隨著同志的數量而變化。當同夥的人數愈眾時，成員的認同感也就愈強。所以意見強度爲 z_i 的一群人 (簡稱爲第 i 群人)，其成員的認同感，應該是這一群人總數 π_i 的函數。所以認同感可以表示爲 $I(\pi_i)$。

影響共識程度的另一項因素是疏離感。所謂的疏離感，指的是因爲意見之差距，所造成的心理距離。疏離感愈強，共識程度也就愈弱。現在若以 $\delta_{i,j}$ 代表 z_i 與 z_j 之間的距離，亦即 $\delta_{i,j} \equiv \left|z_i - z_j\right|$，則我們可以定義第 i 群人與第 j 群人之間的疏離感是 $\delta_{i,j}$ 的函數。換言之，疏離感即爲 $A(\delta_{i,j})$。

經過上文之說明，我們知道共識程度受到認同感與疏離感之影響，而認同感與疏離感，又分別是人數與意見距離的函數。因此不難推論，當第 i 群人中的一個代表性成員，面對第 j 群人中的另一個成員時，他所感覺到的共識度應該是 $I(\pi_i)$ 與 $A(\delta_{i,j})$ 的函數，亦即共識度爲 $\phi(I(\pi_i), A(\delta_{i,j}))$，或簡寫成 $\phi(\pi_i, \delta_{i,j})$。準此，我們可以推論任何一個分配的共識程度，應爲：

$$S(\pi, z) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \pi_i \pi_j \, \phi(\pi_i, \delta_{i,j}). \qquad (1)$$

上式之由來，乃是遵循功利主義 (utilitarianism) 的精神。質言之，功利主義者將社會福利定義成爲個人福利的加總，而我們則將社會的共識程度，定義成爲個人共識感之總合。具體而言，(1) 式之來由，其演繹過程如下：

i) 已知第 i 群人中的一個代表性個人，他對第 j 群中的任何一個成員之共識感等於 $\phi(\pi_i, \delta_{i,j})$。現因第 j 群中共有 π_j 個人，所以此人對第 j 群全體的共識感就等於 $\pi_j \phi(\pi_i, \delta_{i,j})$。

ii) 所謂的「第 j 群」，可以是 K 群中的任何一群，因此第 i 群中的一個代表性個人，他對其他各群人的總合共識感即爲 $\sum_{j=1}^{K} \pi_j \phi(\pi_i, \delta_{i,j})$。

iii) 因爲第 i 群中，共有 π_i 個人，所以第 i 群人對其他各群人的總合共識感應當等於 $\pi_i \sum_{j=1}^{K} \pi_j \phi(\pi_i, \delta_{i,j})$。

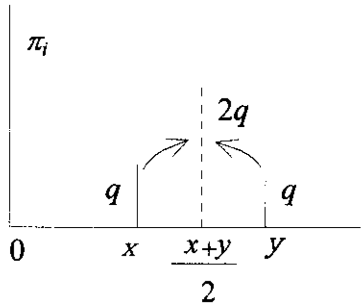
iv) 最後，所謂的「第 i 群」，可以是 K 群之中的任何一群。所以社會的共識程度即爲 $\sum_{i=1}^{K} \pi_i \sum_{j=1}^{K} \pi_j \phi(\pi_i, \delta_{i,j})$。此式經整理後，就是上文的第 (1) 式。

3.4 共識公設

根據前一小節所敘述之模型，一個社會的共識程度就是個人共識感的總和。但是個人的共識感 $\phi(\pi_i, \delta_{i,j})$，不過是一個隱函數而已。所以 $\phi(\pi_i, \delta_{i,j})$ 的函數型態必須先確定下來，才有可能計算一個分配的共識程度。

現即藉助公設式分析法，將 $\phi(\pi_i, \delta_{i,j})$ 的函數型態推演出來。首先建立下述五項公設，這些公設的內容將以圖形、文字和數學詳加解釋。

公設 C1：

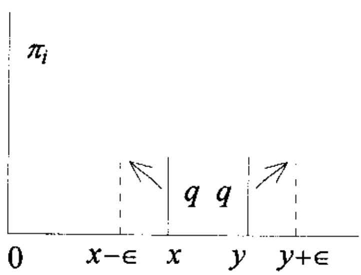


條件：$\pi_i, q \gg 0, 0 < x < y$。

內涵：有兩群意見強度分別爲 x 與 y 的人，各群人口的總數皆爲 q；如果這兩群人的意見趨於一致，集中在 $(x+y)/2$ 的位置之上，則第 i 群人所感覺到的共識程度不會增加。

說明：這是一項直觀的公設。當右邊兩群人的意見趨於一致時，他們與第 i 群人的平均意見距離並沒有改變，所以第 i 群人所感覺到的共識程度，沒有理由增加。

公設 C2：

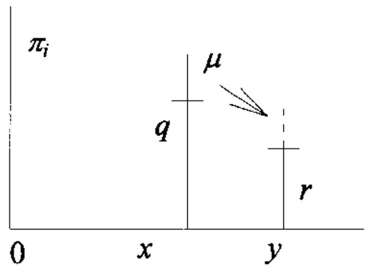


條件：$\pi_i, q \gg 0, 0 < x < y, 0 < \in < x$。

內涵：有兩群意見強度分別爲 x 與 y 的人，各群人口的總數皆爲 q，如果這兩群人的意見趨於分散，分別移動到 $x-\in$ 與 $y+\in$ 的位置之上，則第 i 群人所感覺到的共識程度不會增加。

說明：這也是一項直觀的公設。當右邊兩群人的意見以等距散開之後，對第 i 群人而言，平均的意見距離並沒有改變；而且向第 i 群靠攏的人，因爲 $\in < x$，所以事實上並未加入第 i 群人的行列。既然平均的意見距離不變，而且第 i 群人的總數也不變，所以這群人所感覺到的共識程度，沒有增加的道理。

公設 C3：



條件：π_i, q, r » $0, 0 < x < y, \mu < q$。

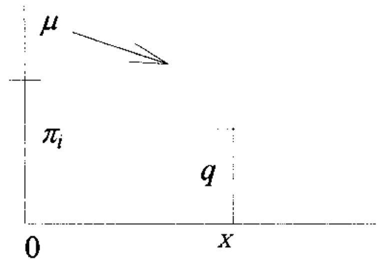
內涵：有兩群意見強度分別爲 x 與 y 的人，前者的人口總數爲 q，後者的人口總數爲 r；如果在意見強度爲 x 的人群當中，有 μ 人改變立場，加入意見強度爲 y 的行列之中，則第 i 群人所感覺到的共識程度會減少。

說明：這項公設其理自明。

公設 C4：如果 (π, z) 分配的共識程度不亞於 $(\hat{\pi}, \hat{z})$ 分配，即 $S(\pi, z) \geq S(\hat{\pi}, \hat{z})$，則對所有的 $\lambda > 0$ 而言，$S(\lambda\pi, z) \geq S(\lambda\hat{\pi}, \hat{z})$。

說明：這是一項有關齊質性 (homotheticity) 的公設，目的在保證任意兩個分配作等比例的放大或縮小之後，其共識度指標在排序上不會發生逆轉的現象。這項公設經常出現在衡量所得分配不均度的文獻之中，例如 Esteban 與 Ray (1994)，以及 Foster (1985) 都曾經將其當作基本公設運用。

公設 C5：



條件：$\pi_i, q \gg 0$，μ 趨近於0。

內涵：如果在第 i 群人當中，有 μ 人 (μ 趨近於0) 改變立場，加入意見強度為 x 的行列，則這兩群人所感覺到的總合共識程度，會產生如下之變化：

i) 若 $\pi_i < q$，則增加；

ii) 若 $\pi_i = q$，則不變；

iii) 若 $\pi_i > q$，則減少。

說明：這項公設乍看之下十分複雜，但是道理卻很平常，它的意思是說：如果有人脫離少數，加入人數較多的一群，則兩群人總合的共識程度會增加；反之，如果有人脫離多數，投靠少數族群而去，則兩群人總合的共識程度會減少。

3.5 主要定理

前述的五個公設，可以演繹出下述定理。

定理 1：設 $\beta > 0$，$\alpha \in (0,1)$，則一個分配的共識程度為：

$$S^*(\pi, z) = -\beta \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \pi_i^{1-\alpha} \pi_j \delta_{i,j}; \tag{2}$$

若且唯若公設 C1 至公設 C5 滿足。

證明：(必要性) 首先考慮公設 C1。在原分配下，第 i 群人的共識感為：

$$\phi_i^1 \equiv \pi_i q \phi(\pi_i, x) + \pi_i q \phi(\pi_i, y). \tag{3}$$

分配改變以後的共識感為：

$$\phi_i^2 \equiv 2\pi_i q \phi(\pi_i, \frac{x+y}{2}). \tag{4}$$

現根據此公設並利用 (3)、(4) 兩式，

$$\pi_i q \phi(\pi_i, x) + \pi_i q \phi(\pi_i, y) \geq 2\pi_i q \phi(\pi_i, \frac{x+y}{2}). \tag{5}$$

因此對任何的 $(\pi_i, q) \gg 0$ 而言，

$$\phi(\pi_i, x) + \phi(\pi_i, y) \geq 2\phi(\pi_i, \frac{x+y}{2}). \tag{6}$$

由於$x<y$，因此當 x 與 y 十分接近時，上式隱涵 ϕ 對任何的 π_i 而言，必須是 $\delta_{i,j}$ 的非凹性 (nonconcave) 函數。

其次考慮公設 C2。在原分配下，第 i 群人的共識感即為 (3) 式所示。至於分配改變以後的共識感則為：

$$\phi_i^2 \equiv \pi_i q \phi(\pi_i, x-\in) + \pi_i q \phi(\pi_i, y+\in). \tag{7}$$

因此對任何的 $(\pi_i, q) \gg 0$ 而言，公設 C2 要求：

$$\phi(\pi_i, x) - \phi(\pi_i, x-\in) \geq \phi(\pi_i, y+\in) - \phi(\pi_i, y). \tag{8}$$

由於 $x<y$，因此當 $\in$ 是一個極小的正實數時，上式隱涵 ϕ 對任何的 π_i 而言，必須是 $\delta_{i,j}$ 的非凸性 (nonconvex) 函數。

第三，根據公設 C3，在原分配下，第 i 群人的共識感仍如 (3) 式所示。而分配改變以後的共識感則為：

$$\phi_i^2 = \pi_i(q-\mu)\phi(\pi_i, x) + \pi_i(r+\mu)\phi(\pi_i, y). \tag{9}$$

因此對任何的 $(\pi_i, q) \gg 0$ 而言，公設 C3 要求：

$$\phi(\pi_i, y) < \phi(\pi_i, x). \tag{10}$$

由於 $x<y$，所以上式隱涵 ϕ 對任何的 π_i 而言，必須隨 $\delta_{i,j}$ 而遞減。

證明至此我們發現，對任何的 π_i 而言，ϕ 既是 $\delta_{i,j}$ 的非凹性也是非凸性函數，而且遞減。所以 ϕ 是 $\delta_{i,j}$ 的直線型且遞減之函數。此外，由於 $\delta_{i,j} = |z_i - z_i| = 0$，因此 ϕ 的函數型態可以進一步確定為：

$$\phi(\pi_i, \delta_{i,j}) = -b\varphi(\pi_i)\,\delta_{i,j}. \tag{11}$$

其中，b 是一個大於 0 的正實數。

檢查上式後發現，唯一尚待決定的就是 φ 的函數型態。而公設 C4 與公設 C5 可以協助完成這項工作。首先就公設 C4 而言，Esteban 與 Ray (1994) 證明，利用這項公設可以演繹出一條 Cauchy 方程式，並且能夠確定 φ 是一個指數函數，[7]

$$\varphi(\pi_i) = \gamma\pi_i^{-\alpha} \quad \gamma > 0. \tag{12}$$

現在將 φ 代回(11)式，再求 ϕ 對 π_i 的偏微分可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial\pi_i} = \alpha b\gamma\pi_i^{-\alpha-1}\delta_{i,j} \tag{13}$$

由於本模型假定，同夥的人數愈眾，認同感愈強，共識度也會隨之而上升，所以上式不能為負值。因此我們可以確定 $\alpha > 0$，但是 α 的上下限仍有待決定，而此則有賴公設 C5 輔助之。

根據公設 C5，以及 (11)、(12) 兩式，分配改變之後的總合共識程度爲：

$$\Phi(\mu) \equiv -b\gamma x[(\pi_i - \mu)^{1-\alpha}(q+\mu) + (q+\mu)^{1-\alpha}(\pi_i - \mu)]. \qquad (14)$$

取 Φ 對 μ 的微分，並且定義 $t \equiv q / \pi_i$，則下式成立：

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right|_{\mu=0} = -b\gamma x \pi_i^{1-\alpha}[(1-\alpha)(t^{-\alpha} - t) - t^{1-\alpha} + 1]. \qquad (15)$$

利用數值模擬，以及 $\alpha, t \gg 0$ 的條件，不難證明 C5 若欲滿足，則 $0 < \alpha < 1$，亦即，$\alpha \in (0,1)$。最後定義 $\beta \equiv b\gamma$，如此即完成本定理必要條件之證明。

(充分性) 以第 (2) 式所定義的 S^* 爲準，檢查每一個公設所列述的情況，結果均能滿足，充分條件因此得證。

本定理得證。

肆、共識度指標的性質

4.1 指標之標準化

共識度指標 S^* 的數值爲負，而且這項指標的絕對值，會隨著受訪者的總人數之增加而增加。這兩項性質，使得 S^* 在應用上會遭遇到如下之困擾：

i) 一般指標通常爲正值，如果有一種指標是以負數表示，將會造成判讀上的不方便。例如當甲分配的 S^* 爲 -333，乙分配的 S^* 爲 -1 時，甲分配的共識程度比乙分配低。這對研究者與閱讀者而言，能否立即會意且適應，不無疑問。

ii) 當受訪者的總人數增加時，S^* 的絕對值會隨之而增加。所以一個分配的共識程度，必然會隨著樣本數的大小而變化。這項性質顯然不合理，而且無法對受訪者總數不同的兩個分配，進行共識程度之比較。

解決上述困擾的途徑，就是要想辦法將 S^* 轉換成爲正值，並且將 S^* 標準化 (normalization)，使其不再受到總人數變動的影響。本節選擇標準化，作爲初步之工作。至於指標轉換的問題，則留待第 4.4 節再作研究。

首先令 $\beta \equiv (\sum_{i=1}^{K} \pi_i)^{-(2-\alpha)}$ ，再將 β 的數值代入 (2) 式，整理後可得

$$s = -\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} f_i^{1-\alpha} f_j \, \delta_{i,j} \,. \tag{16}$$

標準化以後的共識度指標，我們將它重新命名爲 s。至於式中的 f_i 則代表第 i 群人佔總受訪人數的比率，$f_i \equiv \pi_i / \sum_{i=1}^{K} \pi_i$ ，亦即第 i 群人之相對次數 (frequency)。由於新指標 s 係由分配之相對次數計算而得，所以它不會受到總受訪人數增減變化的影響。下文即以此一經過標準化以後的共識度指標 s，替代原先的指標 S^* ，作爲研討之核心。

4.2 s 指標的上限與下限

s 的上限是0，此一情況發生在受訪者的意見，全數集中在一點的時候。至於集中在那一點，則無關緊要。[8] 此驗證本文先前之立論：所謂的完全共識，指的就是全體之意見一致的情況，此時共識度指數應該攀升到它的上限。顯而易見的是 s 滿足這項要求。

至於 s 的下限就不像它的上限一樣，那麼容易決定了。目前我們只知道此一極限值會隨著 K 與 α 而變動 (上限恆等於0，不會改變)，

卻不清楚它的數值究竟應該等於多少。表 1所列式的數據，將有助我們說明這項事實。

表 **1**

分配	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	0	0	0	7	6	5	4	3	2
	0	0	7	0	1	1	2	2	2
	0	7	0	0	0	1	1	2	2
	14	0	0	0	0	0	0	0	2
	0	7	0	0	0	1	1	2	2
	0	0	7	0	1	1	2	2	2
	0	0	0	7	6	5	4	3	2
$s_{.1}$	0	-0.18	-0.36	-0.54	-0.55	-0.56	-0.55	-0.52	-0.46
$s_{.5}$	0	-0.24	-0.47	-0.71	-0.91	-1.07	-1.08	-1.04	-1.01
$s_{.9}$	0	-0.31	-0.62	-0.93	-1.65	-2.26	-2.21	-2.11	-2.20
V	0	0.03	0.11	0.25	0.23	0.20	0.18	0.15	0.11
M	0	0.17	0.33	0.50	0.49	0.48	0.47	0.43	0.38
G	0	0.17	0.33	0.50	0.49	0.48	0.47	0.43	0.38
$P_{1.5}$	0	0.06	0.12	0.18	0.12	0.08	0.05	0.03	0.02
$s^*_{.1}$	1	0.67	0.33	0	-0.03	-0.04	-0.02	0.04	0.14
$s^*_{.5}$	1	0.67	0.33	0	-0.29	-0.51	-0.52	-0.47	-0.43

在表 1中，總共有九項分配，每一個分配皆有十四個樣本點，分成七組資料 ($K = 7$)。分配 (1) 的樣本全數集中在中點；從分配 (2) 開始，樣本分成兩群，逐漸離散；至分配 (4) 時，兩群樣本的離散程度

達到極限，此時在兩個端點之上，各有七個樣本點，形成一個兩極分配。我們稱此一過程爲「分散模式」。

相對於分散模式，從分配 (4) 的兩極分配變化至分配 (9)，則是一種持續的集中過程，簡稱「集中模式」。在此一模式下，樣本逐漸由兩端向中點滑動，至分配 (9) 時，形成一個齊一分配，此時各點的樣本數一律相等。

針對這九項分配，我們在 $\alpha \in (0,1)$ 的限制之下，設定了三個數值，分別爲：$\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$，以及 $\alpha = 0.9$。並且計算其所對應的共識度指數，結果列示在表 1各分配之後的第一欄至第三欄之中。檢查這些數據，我們發現下述之事實：

i) 當樣本全數集中的時候，共識度指數最高，此時 $s = 0$，並且不受參數 α 變動之影響。

ii) 當分配按照「分散模式」變化之際，共識度指數隨之而下降 (即負值愈變愈大)；但是當分配按照「集中模式」變化之時，共識度指數是先降後升，而非單調的 (monotonic) 遞增或遞減。

iii) 在不同的 α 值之下，兩極分配與齊一分配，皆非共識程度最低的分配。

iv) 當 $\alpha = 0.1$ 與 $\alpha = 0.9$ 時，型態爲 (5, 1, 1, 0, 1, 1, 5) 的第 (6) 種分配，是共識程度最低的分配。但是當 $\alpha = 0.5$ 的時候，共識程度最低的分配由第 (7) 項分配取代之，其型態爲 (4, 2, 1, 0, 1, 2, 4)。據此推測，s 的下限乃隨參數 α 之數值而變動。

v) 兩極分配與齊一分配的共識程度，孰高孰低，並無定論。當 $\alpha = 0.1$ 時，兩極分配的共識程度較低；反之，當 $\alpha = 0.5$，以及 $\alpha = 0.9$ 的時候，兩極分配的共識程度較高。

根據上述之說明，顯然我們對於 s 的下限，所知極爲有限。換言之，何謂「完全沒有共識」，乃是一個無法明確定義的概念。但是這並不表示，我們不能臆測，何種類型的分配會讓 s 降到臨界點。

事實上，從 s 指標的組成和原理，不難推論一個分配的 s 值會隨著該分配的兩極化與齊一化之程度而變化。質言之，一個分配的兩極化程度愈高，疏離感愈強，而疏離感增強則會降低共識程度；另一方面，如果一個分配的齊一化程度愈高，則認同感愈低，而認同感愈低，共識度愈小。因此，如果有一個分配既是兩極分配也是齊一分配，則該分配就是一個「完全沒有共識」的分配。

問題是只有當 $K = 2$ 的時候，才可能出現這種兩極兼齊一的分配。此時，樣本均分成兩群 (所以是齊一分配)，分佈在僅有的兩點之上，於兩極對峙 (所以是兩極分配)。

經過計算以後發現，這種分配的 s 指數等於 $-2^{(\alpha-1)}$。因此當 α 趨近於其上界 1 的時候，s 指數趨近於 -1；而當 α 趨近於其下界 0 的時候，s 指數趨近於 -0.5。換言之，s 的下限乃隨參數 α 的數值而變動，而在 $K = 2$ 的情況下，最小的下限趨近於 -1。

但是當 $K > 2$ 的時候，兩極化與齊一化就不可能並存了。以 $K = 3$ 爲例，如果是齊一分配，則各點所當配置的樣本，應爲總樣本數的三分之一。反之，如果是兩極分配，則全部的樣本應該平均配置在兩個端點之上，而中點則不能有任何樣本。很顯然地，在此狀況下，齊一分配與兩極分配，並不相容。同理可證，在 K =4,5,6,…的場合，也不可能出現這種兩極與齊一性共存的分配。

準此，我們的推測是：當 $K > 2$ 時，共識程度最低的分配，應該是一種介於兩極分配與齊一分配之間的一種分配。換言之，這種情況應該發生在「集中模式」的過程之中，例如表 1中的第 (6) 種分配，或第 (7) 種分配。同時必須注意的是，當 $K > 2$ 時，s 的數值可以低於

-1。[9] 所以 -1 雖然是 s 在 $K=2$ 時的最小下限，卻不是其他情況的下限。

4.3 s 指標與離散度指標、不均度指標之關係

在第 2節中，我們曾經大略討論過共識度與離散程度的關係，現則進一步將分析之重點，聚集在 s 指標與變異數 V，均互差 M，吉尼係數 G，以及 Esteban 與 Ray (1994) 的兩極化指標 P 之關係上。

設以 θ 代表 z_i 的平均數，$\theta \equiv \sum_{i=1}^{K} f_i z_i$，則各項指標的定義如下式所示：

$$V=\sum_{i=1}^{K} f_i (z_i-\theta)^2 \text{，}$$

$$M=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} f_i f_j \delta_{i,j} \text{，} \tag{17}$$

$$G=\frac{M}{2\theta} \text{，}$$

$$P=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} f_i^{1+a} f_j \delta_{i,j}, \quad a\in(0,1.6).$$

比較 (16)、(17) 兩式，並且利用表 1的數値，可以綜合整理出以下四點結論：

i) [s 與 V 之關係]：從數學定義式的型態而言，s 與 V 並無直接之關連。此外，變異數最大的分配是兩極分配 (即第 (4) 項分配)，但是該分配並非共識程度最低的分配，除非 $K=2$。所以各種分配如果按照 V的大小排序，則其順序不會與按照 s 由小到大所排出來

的順序相同。[10] 由此可見，s 指標的功能與變異數有別，所以 V 無法取代 s 指標。

ii) [s 與 M 之關係]：從這兩個指標的數學定義，可以發現，如果 α 趨近於 0，則 s 趨近於 $-M$。亦即，$\lim_{\alpha \to 0} s = -M$，所以 s 是一種廣義的均互差。更具體地說，由於認同感對共識度的影響反應在 α 的數值之上。所以當 $\alpha = 0$ 時，即表示認同感對共識度不發生影響，因此均互差實質上就是一種沒有將認同感納入考慮的共識度指標。由此引伸，不難理解 s 指標的 α 值爲什麼必須限定在大於 0 的區間之內。[11]

iii) [s 與 G 之關係]：透過第 (17) 式中 G 與 M 之關係，[12] 立即得證：$\lim_{\alpha \to 0} s = -2\theta G$。所以 s 與 G 的關係與前述之 s 與 M 之關係相類似，於此不再贅述。[13]

iv) [s 與 P 之關係]：兩極化指標與共識度指標的數學型態接近，兩者同時將認同感和疏離感的因素考慮在內，而兩者最主要差別則在於 α 係數與 a 係數的值域不同。所以兩極化程度最強的分配，就是兩極分配。[14] 但是根據前文之說明，除非 $K = 2$，否則最缺乏共識的分配不會是兩極分配。事實上，這兩項指標的異同，絕對是一項值得深入探索的問題，但是篇幅所限，進一步的研究有待另文繼續。惟需聲明的是，本研究受 Esteban 與 Ray (1994) 之影響甚爲深遠，所以 s 指標無疑地是 P 指標的羽裔。

4.4 理想的指標 —— s^* 指標

前文曾經提到：「一般指標通常爲正值，如果有一種指標是以負數表示，將會造成判讀上的不方便。」遺憾的是，s 指標正是一種以負數表示的指標。現在如果想要彌補這項缺陷，最理想的作法，莫過於進行指標的轉換。轉換的方法如下。

設若我們知道 s 指標的上限與下限，例如 $s \in [\underline{s}, \bar{s}]$，其中 $\underline{s} < \bar{s} \leq 0$，如此則不難衍生出另外一個指標，

$$s^{\circ} = 1 - \frac{\bar{s} - s}{\bar{s} - \underline{s}}. \tag{18}$$

上項指標 s° 具備以下兩個優點：

i) s° 是 s 的直線型轉換，所以 s° 能夠保留 s 的全部特性，不會發生扭曲的現象。

ii) 經過轉換後，共識程度的數值會從負值，自動轉變成爲一個介於 0 與 1 中間的實數，亦即 $s^{\circ} \in [0,1]$。當一個分配的 s 到達它的上限 $\bar{s}$ 時，s° 的數值也會升達其上限，此時 $s^{\circ} = 1$。反之，當 $s = \underline{s}$ 時，s° 則會降到其下限，此時 $s^{\circ} = 0$。因此 s° 是一個意義明確，界定清楚的指標。

新指標 s° 固然具備上述之優點，但是 (18) 式的轉換，係以 $\underline{s}$，以及 $\bar{s}$ 爲已知作前提。唯所遺憾的是，我們知道 $\bar{s} = 0$，但是 $\underline{s}$ 的數值，誠如第 4.2節之分析，目前仍不清楚。所以 s° 在應用上，距離成熟仍有一段里程。

所幸的是，我們可以另闢蹊徑，建立下述之指標，

$$s^{*} = 1 - \frac{\bar{s} - s}{\bar{s} - s_p}, \quad s_p \equiv -2^{(\alpha-1)}. \tag{19}$$

這項新指標係將 (18) 式的 $\underline{s}$ 代之以 s_p 而成的，s_p 是一個兩極分配的 s 值，如上式所示。

s^{*} 指標的值域及其特性，如下文所述：

i) 若為完全共識之分配，則 $s=\bar{s}$，所以 $s^*=1$，此乃 s^* 的上限；

ii) 一個分配的共識程度如果介於兩極與完全共識之間，則 $s_p<s<\bar{s}=0$，因此$0<s^*<1$；

iii) 若為兩極分配，則 $s=s_p$，因此$s^*=0$；

iv) 當一個分配的共識程度低於兩極分配時，$s<s_p<0$，因此$s^*<0$。

綜合而論，s^* 乃是一個以兩極分配作為正負值分界點的指標，凡共識程度低於兩極分配者，其 s^* 值小於 0；凡共識度高於兩極分配者，其 s^* 值大於 0，而最大的 s^* 值等於 1。

s^* 是一個理想的指標，因為 s^* 乃是 s 指標的直線型轉換，故能保留原指標的性質，不會因轉換而失真。另一方面，s^* 雖然會變成負值，[15] 但是正負值的分界點以兩極分配為準，意義既清楚又明確，所以我們建議社會學者在衡量共識程度時，應當採用 s^* 指標。

伍、結　論

結論這一節通常是一篇論文的闌尾，結論在正文的每一個角落，沒有人會將結論只寫在結論這一節裡。

如果一定要結論，我的結論是：社會調查是現代占星術，預言的根據；希望本研究所建立的共識度指標 s^*，能夠幫助我們一眼看穿紛亂年代下的台灣社會意向。

註 釋

1 此一軟體係由臺大經研所博士班研究生林欣吾研發而成，特此致謝。

2 經濟學家對於以公設式分析法推演指標的研究並不陌生，例如：Encaoua 與 Jacquemin (1980) 的產業集中度指數 (concentration index) 研究，Fields 與 Fei (1978) 的所得不均度研究，以及 Esteban 與 Ray (1994) 的兩極化指標 (polarization index) 研究等，皆屬經典之作。

3 衡量所得不均度的指標很多，包括著名的吉尼係數在內。

4 均互差的性質參見 Kendall 與 Stuart (1963)，其數學定義見本文第4.3節的 (17) 式。

5 但是不論眞實的問卷將「沒有意見」這個選項放在第幾位，在本研究之架構下，它必須被當作 K 級選項中的中位選項處理，因爲如此方能滿足「選項係按照意見之強度排序」的要求。換言之，「沒有意見」就是不贊成也不反對，所以它的意見強度必須介於最低度的贊成與最低度的反對之間。

6 此乃模仿 Esteban 與 Ray (1994) 在發展兩極化指標時所應用的觀念。

7 這項證明的數學根據參見 Aczél (1966, p. 41) 的'Theorem 3'。

8 檢查第 (16) 式，立即得證。

9 檢查表 1第三欄中的 s 值，即可發現此一事實。

10 比較表 1前三欄與第四欄的數值，即可驗證這項性質。

11 表 1第五欄所列示的就是各項分配的 M 值。若與前三欄的 s 值相比，不難發現根據 M 以及根據 s 所做的排序並不相同。

12 吉尼係數與均互差之關係，參見曹添旺、賴東昇、陳昭南 (1979)，Theil (1967)，Kendall 與 Stuart (1963)，以及 Gastwirth (1972) 等文獻之討論。

13 G 值列示在表 1的第六欄中，由於表中各項分配的平均數皆等於0.5，所以 G 值等於 M 值。

14 參見 Esteban 與 Ray (1994, pp. 837-40) 的'Theorem 2'所做之證明。

15 參見表 1第八欄及第九欄的數字。

參考資料

曹添旺、賴東昇、陳昭南

1979 《廣義的吉尼係數：所得有負時的吉尼係數及其修正》。臺北：中研院三民所專題選刊 (22)。

Aczél, J.

1966 *Lectures on Functional Equations and their Applications*. New York and London: Academic Press.

Encaoua, D. and A. Jacquemin

1980 “Degree of Monopoly, Indices of Concentration and Threat of Entry,” *International Economic Review* 21: 87-105.

Esteban, J. and D. Ray

1994 “On the Measurement of Polarization,” *Econometrica* 62: 819-851.

Fields, G. S. and J. C. H. Fei

1978 “On Inequality Comparisons,” *Econometrica* 46: 303-316.

Foster, J.

1985 “Inequality Measurement,” in *Fair Allocation*, ed. by H. P. Young. Providence: American Mathematical Society.

Gastwirth J. L.

1972 “The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index,” *Review of Economics and Statistics* 54: 306-316.

Kendall M. G. and A. Stuart

1963 *The Advanced Theory of Statistics*. London: Charles Griffen and Company.

Theil H.

1967 *Economics and Information Theory*. Chicago: Rand McNally and Company.